

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**ETAPA LOCALĂ - VRANCEA****9 februarie 2025****Clasa a XII-a**

SUBIECTUL 1. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(7x)}{\sin x}$ și
 $F(x) = x + \sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{3}\sin(6x)$. Arătați că : $\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$.
(G.M. - Supliment)

SUBIECTUL 2. Calculați : $\int \frac{dx}{\sin(x+2) \cdot \sin(x+3)}$; $x \in (-2; 0)$. (Manual , Cls. a XII-a)

SUBIECTUL 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $M = \{a \cdot A + b \cdot I_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
a) Arătați că $A^2 = 5A - 7I_2$.
b) Arătați că $X \cdot Y \in M$, $(\forall) X, Y \in M$.
c) Demonstrați că $(M \setminus \{O_2\}; \cdot)$ este grup de matrice .

SUBIECTUL 4. Se consideră grupul $(H, *)$, unde $H \subset (0, +\infty)$ este o mulțime care verifică condițiile :
i) $x \in H \Rightarrow \frac{1}{x} \in H$ și ii) $2025 \in H$. Știind că $x * y = \frac{1}{x} * \frac{1}{y}$, $(\forall) x, y \in H$, arătați că :
a) $1 \notin H$;
b) $(x * x) \cdot \left(x * \frac{1}{x}\right) = 1$, pentru orice $x \in H$;
c) există un grup care verifică toate proprietățile din enunț .

Propunători : prof. Oprea Tiberiu - C.N." Al. I. Cuza " - Focșani
prof. Stoleru Cristian - C.N." E. Botta " - Adjud

SUCCES !

Notă : Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte .